

# 基于 PIV 速度场测量的压强梯度计算

王 勇<sup>1,2</sup>, 陈 鹏<sup>1,2</sup>, 黄 奔<sup>2</sup>, 郑 谢<sup>2</sup>

- (1. 中国空气动力研究与发展中心 空气动力学国家重点实验室, 四川 绵阳 621000;
2. 中国空气动力研究与发展中心 气动噪声控制重点实验室, 四川 绵阳 621000)

**摘 要:** 介绍了基于 PIV 速度场测量结果计算压强梯度的基本原理和 3 种不同的计算方法,并通过对流高斯涡模型系统研究了离散格式选取、PIV 参数设置和流场特征等对压强梯度计算的影响. 结果表明:PIV 速度测量的精度是压强梯度计算的关键性影响因素,1% 噪声对结果的影响比其他过程高约 2 个数量级;时间分辨率和空间分辨率的设置并非越高越好,而是有个合适的中间值;拉格朗日方法在大多数情况下优于欧拉方法,但当流动结构较复杂时性能较差,应根据流动类型和流场特征合理选取压强梯度计算方法.

**关 键 词:** 粒子图像测速 (PIV); 压强梯度; 离散格式; 压强估计; 远场噪声预测

中图分类号: V211.7

文献标志码: A

## PIV velocity field measurement-based pressure gradient computation

WANG Yong<sup>1,2</sup>, CHEN Peng<sup>1,2</sup>, HUANG Ben<sup>2</sup>, ZHENG Xie<sup>2</sup>

- (1. State Key Laboratory of Aerodynamics, China Aerodynamics Research and Development Center, Mianyang Sichuan 621000, China;
2. Key Laboratory of Aerodynamic Noise Control, China Aerodynamics Research and Development Center, Mianyang Sichuan 621000, China)

**Abstract:** A description of the basic operation principles of the (particle image velocimetry) PIV velocity field measurement-based pressure gradient calculations and three different methods were described in detail. Then, an analytic test case of the convection of a Gaussian vortex was considered to give insight into the influences of the discrete scheme, parameter setting and flow field characteristic on successful determination of the pressure gradient field. Results showed that the uncertainty of pressure gradient calculation was dominated by errors of PIV velocity measurements. The effect of 1% errors in velocity on the result was about two orders of magnitude higher than any other steps. Time and spatial resolution settings were not as high as possible, but there was a suitable intermediate value. The Lagrangian approach was superior to the Euler approach in most cases, but the former became worse when the flow structure was more complex, the pressure gradient calculation method should be selected according to the flow type and flow field characteristics.

**Key words:** particle image velocimetry (PIV); pressure gradient; discrete scheme; pressure evaluation; far-field noise prediction

收稿日期:2016-06-27

基金项目:国家自然科学基金(11602290,11504417);振动与噪声控制技术装备预研项目(51334060301);中国空气动力研究与发展中心创新基金项目

作者简介:王勇(1982—),男,助理研究员,博士,主要从事气动噪声控制、PIV 试验技术研究工作.

引用格式:王勇,陈鹏,黄奔,等.基于 PIV 速度场测量的压强梯度计算[J].航空动力学报,2017,32(6):1491-1504. WANG Yong, CHEN Peng, HUANG Ben, et al. PIV velocity field measurement-based pressure gradient computation[J]. Journal of Aerospace Power, 2017, 32(6): 1491-1504.

粒子图像测速 (particle image velocimetry, PIV) 技术由于能非接触地获取流场中高时间分辨率和高空间分辨率的速度信息,自 1984 年被明确地提出以来,已经成为非定常流动研究中一种重要的流场测量和流动显示手段<sup>[1-2]</sup>. 随着数字照相、高性能计算机和图像处理技术等的发展,在 30 余年的时间里,PIV 技术不断地向纵深方向发展. 从纵向角度来说,PIV 不断地向更精细化、更准确和更高维度(二维到三维)的速度测量和流场显示方向发展<sup>[3-4]</sup>;而在横向研究领域,各种基于 PIV 速度场测量结果的试验技术不断涌现,例如空间压强场重构<sup>[5-6]</sup>、远场噪声预测<sup>[7-8]</sup>和气动载荷确定<sup>[9-10]</sup>等等. 在这些横向试验技术中,压强梯度计算是一个关键的环节. 压强梯度不仅是基于 PIV 速度场测量的压强场重构、远场噪声预测和气动载荷确定的源项,还给出了数值计算时的边界条件<sup>[5-10]</sup>.

基于 PIV 速度场测量结果计算压强梯度的基本原理是不可压动量方程,该方程给出了压强梯度与速度之间的关系. 根据对物质导数的不同处理方式,压强梯度可以通过欧拉方法或拉格朗日方法进行计算. 欧拉方法中,物质导数的计算是关于固定的空间位置进行的;而拉格朗日方法中,物质导数的计算是关于运动的流体质点进行的. Jakobsen 等<sup>[11]</sup>通过波传播问题的比较分析认为,拉格朗日方法对物质导数的计算优于欧拉方法,但当波撞击到竖直壁面时,欧拉方法优于拉格朗日方法. Christensen 和 Adrian<sup>[12]</sup>研究发现,空间某点处物质导数的量级约比当地加速度的变化小 1 个数量级,因此拉格朗日方法的计算更准确. Violato 等<sup>[13]</sup>的对比研究发现,当要求压强梯度的计算误差小于 10% 时,欧拉方法不再适用.

尽管已经有一些研究工作考察了基于 PIV 速度场测量结果计算空间压强梯度的可行性和潜力<sup>[11-20]</sup>,但是仍缺少对相关参数设置的全面分析,如影响压强梯度计算准确性的离散格式、空间分辨率和时间分辨率等. 其次,计算压强梯度的各种方法散落于不同的文献中,对它们的系统比较和选取建议鲜有报导. 同时,现有计算方法的某些方面还需要进一步改进和创新<sup>[20]</sup>,例如,前期研究中,对拉格朗日方法不能计算的点通常直接剔除<sup>[18-19]</sup>,无法给出相应空间位置的压强梯度值,如何完善该方法是一个值得研究的问题.

本文将通过对流高斯涡模型对不同压强梯度

计算方法的性能开展全面的对比分析,系统研究离散格式选取、PIV 参数设置和流场特征等对压强梯度计算的影响,以期 PIV 试验设置、数据处理和误差分析提供参考和指导.

为方便,表 1 列出了本文用到的主要符号.

表 1 主要符号表  
Table 1 Main notations list

| 符号                                     | 说明       |
|----------------------------------------|----------|
| $\boldsymbol{u}$                       | 速度场      |
| $\nabla p$                             | 压强梯度     |
| $\partial \boldsymbol{u} / \partial t$ | 当地加速度    |
| $D \boldsymbol{u} / D t$               | 物质导数     |
| $U_a$                                  | 涡对流速度    |
| $V_p$                                  | 最大切向速度   |
| $r_c$                                  | 涡核半径     |
| $h$                                    | 像素之间物理间隔 |
| $\Delta t$                             | 时间间隔     |

1 基本原理

二维不可压缩流动条件下,动量方程可表示为

$$\nabla p = -\rho(D\boldsymbol{u}/Dt - \nu \nabla^2 \boldsymbol{u}) \tag{1}$$

其中  $\boldsymbol{u} = u\boldsymbol{i} + v\boldsymbol{j}$  为  $x-y$  平面上的速度场,  $D\boldsymbol{u}/Dt$  是物质导数,  $\nu$  是动力学黏度,  $\nabla p$  是压强梯度. 该方程给出了压强梯度与速度之间的关系,使得从 PIV 速度场测量结果计算空间压强梯度成为可能.

根据物质导数的不同表现方式,可以得到 3 种不同形式的压强梯度计算方法

1) 守恒型欧拉方法 (conservation Eulerian, CE)<sup>[14-15]</sup>

$$\nabla p = -\rho[\partial \boldsymbol{u} / \partial t + \nabla \cdot (\boldsymbol{u} \boldsymbol{u}) - \nu \nabla^2 \boldsymbol{u}] \tag{2}$$

2) 非守恒型欧拉方法 (non-conservation Eulerian, NCE)<sup>[13,16]</sup>

$$\nabla p = -\rho[\partial \boldsymbol{u} / \partial t + (\boldsymbol{u} \cdot \nabla) \boldsymbol{u} - \nu \nabla^2 \boldsymbol{u}] \tag{3}$$

3) 非守恒型拉格朗日方法 (non-conservation Lagrangian, NCL)<sup>[17-19]</sup>

$$\nabla p = -\rho[d\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}_p(t), t)/dt - \nu \nabla^2 \boldsymbol{u}] \tag{4}$$

其中  $\boldsymbol{x}_p(t)$ ,  $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}_p(t), t)$  分别是  $t$  时刻流体粒子的位置和速度.

PIV 图像分析得到流场的速度数据  $(u, v)$  后,即可选取上述 3 种形式中的一种并结合恰当的离散格式,计算得到流场的空间压强梯度分布.

2 仿真流场

涡流是流体动力学研究中经常出现的流动结

构<sup>[18-19]</sup>,为考察并评估基于 PIV 速度场测量结果的压强梯度计算的性能,采用仿真的对流高斯涡模型作为试验案例。

对流高斯涡模型是高斯涡与  $x$  方向均匀对流流动的线性叠加,其中涡对流速度为  $U_a$ ,高斯涡相对于涡中心的切向速度  $V_\theta$  为

$$V_\theta = \Gamma(1 - e^{-r^2/c_\theta})/(2\pi r) \quad (5)$$

其中  $\Gamma = 2\pi r_c V_p/(1 - e^{-\gamma})$  为涡的环量,  $r_c$  为高斯涡达到最大切向速度  $V_p$  时相对于涡中心的距离,  $\gamma = 1.256431$ ,  $r$  是流体质点相对于涡中心的距离,  $c_\theta = r_c^2/\gamma$ 。

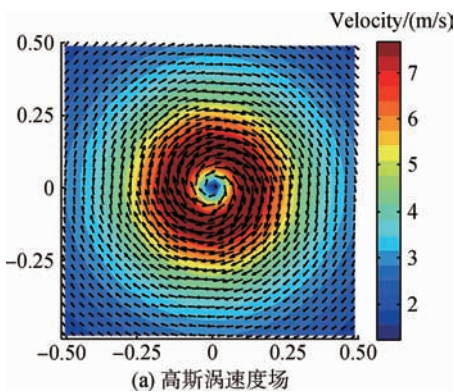
对流高斯涡模型的  $x$  方向压强梯度分布为

$$p_x = \partial p / \partial x = -\rho \Gamma^2 (1 - e^{-r^2/c_\theta}) / (4\pi^2 r^2) \cdot [- (1 - e^{-r^2/c_\theta}) / r^2 + 2e^{-r^2/c_\theta} / c_\theta] x - \rho \Gamma^2 (-e^{-r^2/c_\theta} + e^{-2r^2/c_\theta}) x / (2\pi^2 r^2 c_\theta) \quad (6)$$

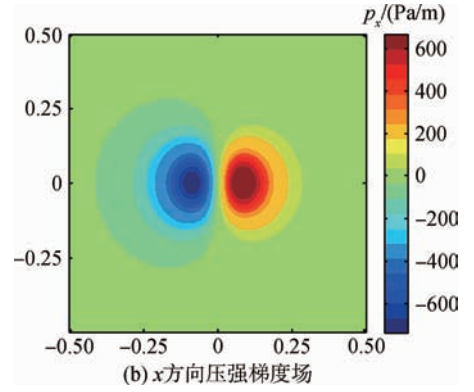
$y$  方向的压强梯度分布  $p_y$  具有相似的表达式。

本文中,速度场的解析表达式用于生成仿真的 PIV 速度场,而压强梯度的解析表达式则用于比较 PIV 压强梯度计算结果与真实压强梯度结果的差异以评估算法的性能。

PIV 试验时采用的双脉冲激光器 1 kHz 频率下的能量为  $2 \times 15 \text{ mJ}$  (记为  $2 \times 15 \text{ mJ} @ 1 \text{ kHz}$ ),片光厚度约为 1 mm,粒子发生器每秒能产生约  $10^8$  个粒子,粒径为  $0.8 \sim 1.2 \mu\text{m}$ ,图像的空间分辨率为  $1024 \text{ 像素} \times 1024 \text{ 像素}$ ,像素之间的物理间隔  $h = \Delta x = \Delta y$ ,采样率  $f = 1 \text{ kHz}$  (对应时间间隔  $\Delta t = 0.001 \text{ s}$ ),查询窗  $16 \text{ 像素} \times 16 \text{ 像素}$ ,重叠因子为 75%。本文后续的仿真流场中,如无特殊说明,采用上述参数设置。对流高斯涡模型中  $U_a = 16 h / \Delta t$ ,  $V_p = 8 h / \Delta t$ ,  $r_c = 128 h$ ,涡中心位于视场中心。图 1 给出了高斯涡仿真流场的速度矢量图与量级图(不含对流速度),以及  $x$  方向的压强梯度分布图。



(a) 高斯涡速度场



(b)  $x$  方向压强梯度场

图 1 速度场和  $x$  方向压强梯度场分布

Fig. 1 Distribution of velocity field and  $x$ -directional pressure gradient field

### 3 压强梯度计算

压强梯度计算的误差主要来自于 3 个方面:数值离散误差、参数设置误差和速度测量误差。当速度数据完全由解析表达式给定时,只存在前两种误差;而当速度数据中存在噪声时,3 种误差均存在。因此,在仿真试验中,除采用真实速度场外,还通过在真实速度场中加入 1% 的高斯噪声考察速度测量误差对压强梯度计算的影响。噪声试验时,在每个数据点的  $u, v$  分量均加入 1% 的高斯正态分布随机噪声以更准确地模拟真实 PIV 测量时的情形。随机生成 10 组不同的噪声数据并取压强梯度计算结果的平均值来考察 1% 噪声量对结果的影响,以降低特定噪声设置对评估结论的影响。因此,本文后续的图 2 ~ 图 15 均是多次重复性测量结果的平均值。

采用归一化方均根(normalized root-mean-square, NRMS)误差,量符号记为  $E_{\text{nrms}}$  和平均峰值响应(average peak response, APR,量符号记为  $R_{\text{ap}}$ )对结果进行评价。

$$E_{\text{nrms}} =$$

$$\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N |p_{x_{i,j}}^{\text{com}} - p_{x_{i,j}}^{\text{real}}|^2 / (M \cdot N)}{(2 \cdot \max p_x^{\text{real}})} + \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N |p_{y_{i,j}}^{\text{com}} - p_{y_{i,j}}^{\text{real}}|^2 / (M \cdot N)}{(2 \cdot \max p_y^{\text{real}})}} \quad (7)$$

$$R_{\text{ap}} = [(p_{x_{\min}}^{\text{com}} / p_{x_{\min}}^{\text{real}}) + (p_{x_{\max}}^{\text{com}} / p_{x_{\max}}^{\text{real}})] / 4 + [(p_{y_{\min}}^{\text{com}} / p_{y_{\min}}^{\text{real}}) + (p_{y_{\max}}^{\text{com}} / p_{y_{\max}}^{\text{real}})] / 4 \quad (8)$$

其中  $p_{x_{i,j}}^{\text{real}}$  和  $p_{x_{i,j}}^{\text{com}}$ ,  $p_{y_{i,j}}^{\text{real}}$  和  $p_{y_{i,j}}^{\text{com}}$  分别为  $x$  和  $y$  方向  $(i, j)$  网格点上真实的和计算的压强梯度,  $\max p_x^{\text{real}} (= \max p_y^{\text{real}})$  为压强梯度的最大值,  $M$  和  $N$  分别为  $x$  和  $y$  方向速度矢量的个数,  $p_{x_{\min}}^{\text{com}}$  和  $p_{x_{\max}}^{\text{com}}$

分别为  $x$  方向计算得到的最小压强梯度和最大压强梯度,其他类似。

为保证在同一准则下对算法性能进行考察,上述两个指标的选取准则是:当对某个参数进行考察时,若该参数变化时  $p_x^{\text{real}}$  和  $p_y^{\text{real}}$  保持不变,则选取 NRMS;否则选取 APR。

下面,首先考察离散格式对欧拉方法和拉格朗日方法计算压强梯度的影响,在得到最优的离散格式后再分别考察 PIV 参数设置和流场特征对压强梯度计算的影响。

3.1 离散格式的影响分析

已有的研究中,通常将黏性项忽略<sup>[8-9,18]</sup>。沿用这种处理方式,首先忽略黏性项,考察离散格式对压强梯度计算的影响,确定压强梯度计算的最优离散格式后再讨论黏性项的影响。

3.1.1 欧拉方法

欧拉方法的计算中所有量是关于固定的空间位置的,已有的研究中通常采用时间和空间的 2 阶中心有限差分对速度测量数据进行离散化,边界上则采用 1 阶向前或向后差分。

本文中,为深入考察离散格式对压强梯度计算的影响,除采用上述离散方法外,还采用 4 阶中心差分和最小二乘差分。

$$(\partial u / \partial x)_{i,j} = (-u_{i+2,j} + 8u_{i+1,j} - 8u_{i-1,j} + u_{i-2,j}) / 12\Delta x + O(\Delta x)^4 \quad (9)$$

具有更小的截断误差,而最小二乘差分

$$(\partial u / \partial x)_{i,j} = (2u_{i+2,j} + u_{i+1,j} - u_{i-1,j} - 2u_{i-2,j}) / 10\Delta x + O(\Delta x)^2 \quad (10)$$

其中 4 阶中心差分能降低速度波动对结果的影响。边界上分别采用 2 阶、3 阶和 4 阶单侧差分与 1 阶向前/向后差分做对比,其具体形式可参考计算流体力学专著,在此不再赘述。图 2 给出了采用不同有限差分格式时的 NRMS 误差。图 2 中,横坐标的前/中/后 12 组数据分别为时间导数采用 2 阶中心、4 阶中心和最小二乘差分的结果;而每个时间导数差分格式下,前/中/后 4 组数据分别为内部点的空间导数采用 2 阶中心、4 阶中心和最小二乘差分的结果;每个内部点空间差分格式下的 4 组数据分别为边界上的空间导数采用 1 阶、2 阶、3 阶和 4 阶单侧差分的结果。

从图 2 中可以看出:①当速度数据不含噪声时,欧拉方法(不管是 CE 还是 NCE)在有限差分格式选取时间导数 4 阶中心差分、内部点的空间导数 4 阶中心差分、边界上的空间导数 2 阶以上

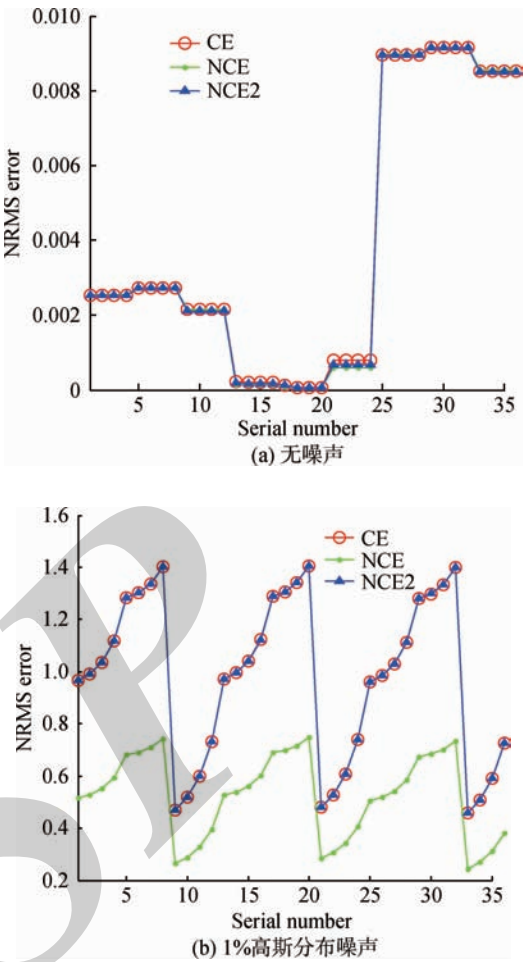


图 2 有限差分格式对欧拉方法压强梯度计算的影响

Fig. 2 Effect of finite-difference scheme on pressure gradient computation using Eulerian approach

差分时结果最好。这说明速度数据不含噪声时,欧拉方法的性能主要受截断误差的影响,有限差分格式的截断误差越小,欧拉方法得到的 NRMS 误差越小。②当速度数据包含噪声时,欧拉方法的 NRMS 误差比无噪声时高约 2 个数量级,最优结果对应的有限差分格式是时间导数最小二乘差分、内部点的空间导数最小二乘差分、边界上的空间导数 1 阶差分。这说明速度数据包含噪声时,欧拉方法的性能主要受噪声的影响。因此,有限差分参与运算的数据点越多,受噪声的影响越大,欧拉方法的结果越差,如 4 阶中心差分的结果劣于 2 阶中心差分、2 阶边界差分劣于 1 阶边界差分。尽管最小二乘差分与 4 阶中心差分参与运算的数据点一样多,但是前者能降低速度波动对结果的影响,因此其结果最优。③速度数据不含噪声时,时间导数差分格式对结果的影响最大,其次是内部点的空间导数差分格式;而当速度数据包含噪

声时,后者对结果的影响最大,而前者的影响最小.由于 PIV 速度测量总会存在误差,因此欧拉方法计算压强梯度的关键是内部点空间导数的差分格式选取.④速度数据不含噪声时,CE 与 NCE 的结果几乎一致,NCE 略优于 CE;而当速度数据包含噪声时,NCE 的结果明显优于 CE.为揭示存在这种现象的原因,注意到,完整形式的  $x$  方向压强梯度为

$$\begin{aligned} (\partial p / \partial x) = & - \underbrace{\rho(\partial u / \partial t + u \partial u / \partial x + v \partial u / \partial y)}_{\text{NCE}} - \\ & \underbrace{\rho w \partial u / \partial z}_{\text{CE}} = - \underbrace{\rho(\partial u / \partial t + \partial u^2 / \partial x + \partial uv / \partial y)}_{\text{CE}} + \\ & \rho u (\partial u / \partial x + \partial v / \partial y) - \rho w \partial u / \partial z \quad (11) \end{aligned}$$

即当采用平面 PIV 数据计算  $x$  方向压强梯度时,CE 相对于 NCE 多舍弃了一项  $\rho u (\partial u / \partial x + \partial v / \partial y)$ . 类似地,计算  $y$  方向压强梯度时,CE 相对于 NCE 会多舍弃一项  $\rho v (\partial u / \partial x + \partial v / \partial y)$ . 当流动是完全二维的时候,速度场的平面散度  $\text{div}_{xy} = (\partial u / \partial x + \partial v / \partial y) = 0$ , CE 和 NCE 是完全一致.但是,当  $\text{div}_{xy} \neq 0$  时,CE 和 NCE 之间就会存在差异.将采用方程  $-\rho\{\partial u / \partial t + u \partial u / \partial x + v \partial u / \partial y\} - \rho u (\partial u / \partial x + \partial v / \partial y)$  计算压强梯度的方法记为 NCE2,采用与 CE 和 NCE 相同的离散格式进行计算.从图中可以看出,NCE2 与 CE 几乎完全一致,这证明了 CE 和 NCE 之间的差异确实与平面散度  $\text{div}_{xy}$  有关.图 3 给出了不同空间导数离散格式下,CE 和 NCE 的 NRMS 误差的差值以及无量纲参数  $\text{div}_{xy} h / U_a$  的 RMS 误差(关于  $\text{div}_{xy} = 0$ ).从图中可以看出,两条曲线的变化趋势基本一致,这进一步证明两者之间确实存在很强的联系.另一方面,从图 2 和图 3 中可以看出, $\text{div}_{xy}$  的变化趋势还与 CE/NCE 的 NRMS 误差变化趋势一致.因此,在其他参数设置相同的情况下, $\text{div}_{xy}$  可以作为欧拉方法选取离散格式的准则.

综上所述,当采用欧拉方法计算压强梯度时,应采用非守恒型欧拉方法.若速度数据是真实的,则采用具有较小截断误差的有限差分格式;而当速度数据包含噪声时,则应采用对噪声不敏感的有限差分格式.

3.1.2 拉格朗日方法

拉格朗日方法的计算中所有量是关于运动的流体质点的,需要根据 PIV 速度测量结果估计流体质点在每个时刻的轨迹及其在相应轨迹点上的速度.根据泰勒级数展开,粒子位置在时刻  $t$  关于

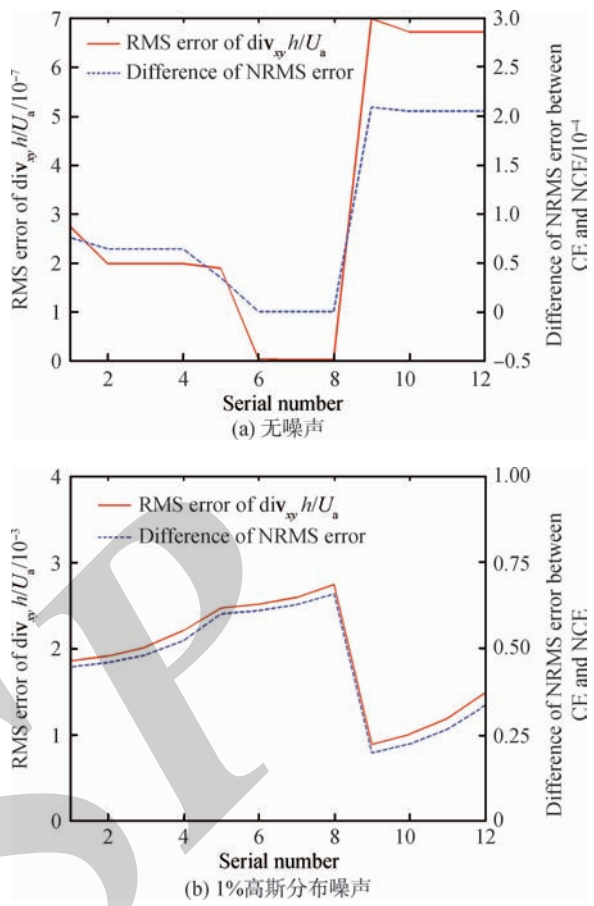


图 3 NRMS 误差差值图及  $\text{div}_{xy}$  的 RMS 误差图  
Fig. 3 Difference diagram of NRMS error and RMS error of  $\text{div}_{xy}$

时间间隔  $\Delta t$  的 2 阶展开如下:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_p(t, \Delta t) = & \mathbf{x}(t) + \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \Delta t + \\ & [\mathbf{D}\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) / \mathbf{D}t] \Delta t^2 / 2 + O(\Delta t^3) \quad (12) \end{aligned}$$

其中  $\mathbf{x}(t)$ ,  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  和  $\mathbf{D}\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) / \mathbf{D}t$  分别是流体质点在  $t$  时刻的位置、速度和物质加速度. PIV 速度测量可以获取网格点上的  $\mathbf{x}(t)$  和  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  信息,而物质加速度则为未知量.因此,可通过迭代算法重构粒子路径并估计物质加速度<sup>[18-19]</sup>

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_p^k(t, \Delta t) = & \mathbf{x}(t) + \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \Delta t + \\ & [\mathbf{D}\mathbf{u}^k(\mathbf{x}, t) / \mathbf{D}t] \Delta t^2 / 2 \quad (13) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{D}\mathbf{u}^{k+1}(\mathbf{x}, t) / \mathbf{D}t = & \{ \mathbf{u}[\mathbf{x}_p^k(t, \Delta t), t + \Delta t] - \\ & \mathbf{u}[\mathbf{x}_p^k(t, -\Delta t), t - \Delta t] \} / (2\Delta t) \quad (14) \end{aligned}$$

其中上标  $k$  是迭代步.除了采用(14)式的 2 阶中心时间插值外,也可以采用 4 阶中心和最小二乘时间插值,其公式可参考式(9)、式(10)和式(14)写出,在此不再赘述.

根据(13)式重构粒子路径时,流体质点在  $t + \Delta t$  时刻的位置  $\mathbf{x}_p^k(t, \Delta t)$  可能不在网格点上,因此需要根据 PIV 测量得到的网格点上的速度推导

这些非网格点上的速度. 本文中,采用最近邻、双线性 and 双 3 次插值估计流体质点在非网格点上的速度值. 但是,当流体质点的位置  $\mathbf{x}_p^k(t, \Delta t)$  不在 PIV 视场范围内时,上述插值方法仍然不能得到相应的速度信息,进而也无法得到相应网格点上的物质加速度  $Du(\mathbf{x}, t)/Dt$  (其值记为 NaN 值). 这些点在前期研究中通常被直接剔除<sup>[18-19]</sup>,本文中,采用线性外插和加权外插来解决上述问题.

值得注意的是,当采用不同的时间插值格式(2 阶中心、4 阶中心和最小二乘)估计物质加速度时,NaN 值物质加速度的个数是不一样的. 2 阶中心时间插值只需要流体质点在  $t-\Delta t, t$  和  $t+\Delta t$  时刻位于视场中,物质加速度即可直接估计;而 4 阶中心和最小二乘时间插值则要求更高,需要流体质点在  $t-2\Delta t, t-\Delta t, t, t+\Delta t$  和  $t+2\Delta t$  时刻均在视场中,物质加速度才可以直接估计. 因此,为保证对比的公平性,应在相同的 NaN 值物质加速度个数和位置的情况下进行. 另一方面,根据上面的分析,当采用 4 阶中心和最小二乘时间插值时,也可以在  $Du(\mathbf{x}, t)/Dt$  未知的位置采用要求更低的时间插值格式减少 NaN 值物质加速度的个数,如 2 阶中心时间插值、1 阶向前/向后时间插值. 因此,可以有 3 种不同的压强梯度计算方法(分别记为 NCL1, NCL2 和 NCL3):①当流体质点在  $t-2\Delta t, t-\Delta t, t, t+\Delta t$  和  $t+2\Delta t$  时刻均在视场中时,采用不同的时间插值格式计算压强梯度. ②在①的基础上,在  $Du(\mathbf{x}, t)/Dt$  未知的位置采用 2 阶中心时间插值计算压强梯度. ③在②的基础上,对  $Du(\mathbf{x}, t)/Dt$  仍未知的数据点采用 1 阶向前/向后时间插值计算压强梯度.

图 4 给出了采用不同处理策略时,拉格朗日方法计算得到的压强梯度结果与真实值之间的 NRMS 误差. 图 4 中,对应于横坐标的前/中/后 6 组数据分别为物质加速度采用 2 阶中心、4 阶中心和最小二乘时间插值进行估计的结果;而每个时间插值格式下,前/中/后 2 组数据分别为非网格点上的速度采用最近邻、双线性和双 3 次插值的结果;每个速度插值下的 2 组数据为 NaN 值物质加速度采用线性外插和加权外插的结果.

从图 4 中可以看出:①当速度数据不含噪声时,非网格点上的速度插值对结果的影响最大,双线性插值略优于双 3 次插值,而最近邻插值最差;当速度数据包含噪声时,NaN 值物质加速度的外插方法对结果的影响最大,线性外插明显优于加权外插,特别是含 NaN 值物质加速度较多的

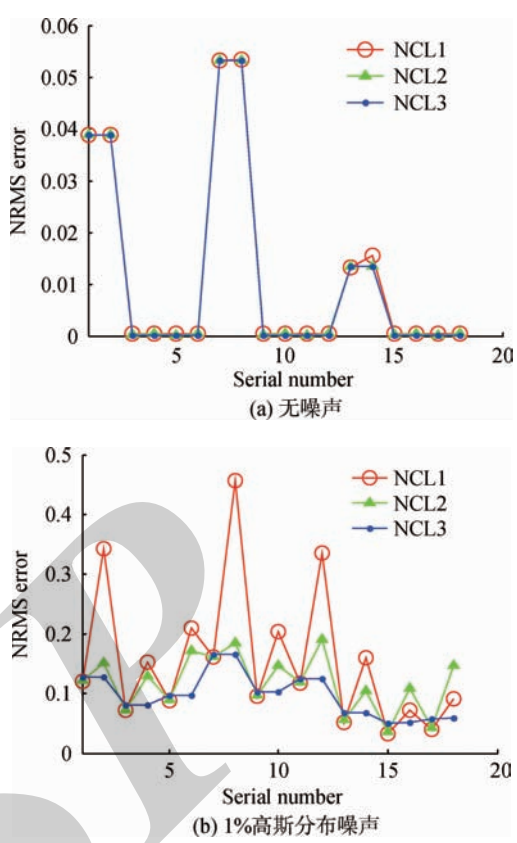


图 4 不同处理策略对拉格朗日方法压强梯度计算的影响

Fig. 4 Effect of different strategies on pressure gradient computation using Lagrangian approach

NCL1. 这说明拉格朗日方法计算压强梯度的关键在于如何确定流体质点在各个轨迹点上的速度值,特别是当流体质点不在 PIV 视场范围内无法估计速度值时,如何外插确定相应点的压强梯度值. ②不论速度数据中是否存在噪声,非网格点上的速度采用双线性插值进行估计时结果最好,而最近邻插值的结果最差;NaN 值物质加速度的估计采用线性外插的结果优于加权外插. ③当速度数据包含噪声时,拉格朗日方法的 NRMS 误差比无噪声时高约 2 个数量级. 因此,压强梯度计算的关键是准确的速度测量. ④当非网格点上的速度采用双线性插值、NaN 值物质加速度估计采用线性外插时,若速度数据无噪声,物质加速度的计算采用 2 阶中心时间插值的结果略优于 4 阶中心和最小二乘时间插值;若速度数据包含噪声,则最小二乘时间插值最优,而 4 阶中心时间插值最差. 其原因是,物质加速度的计算中,时间插值需要的不同时刻的数据点越多,采用式(13)计算的粒子位置越不准确,进而使得速度插值和物质加速度计算的结果误差越大. 但是,由于最小二乘时间插值

自身能降低速度波动对结果的影响,因此速度数据包含噪声时最小二乘时间插值的结果最优. ⑤对压强梯度计算方法而言,当速度数据无噪声时,具有更少 NaN 值物质加速度的 NCL3 的结果优于 NCL2,而 NCL1 的结果最差;而当速度数据包含噪声时,NCL3 的结果差于 NCL2,NCL1 的结果最好. 其原因可能是,当速度数据无噪声时,采用不同时间插值方法计算物质加速度的截断误差均较小,因此,截断误差对结果的影响小于 NaN 值物质加速度外插方法对结果的影响. 由于采用 NCL1 计算物质加速度时 NaN 值较多,对 NaN 值进行外插时误差较大,因此其结果最差. 另一方面,当速度数据中包含噪声时,截断误差不是主要影响因素,而 1 阶向前/向后时间插值计算得到的压强梯度值比 2 阶中心时间插值的误差大,更大于最小二乘时间插值,因此线性外推时引起的误差也越大,最终导致 NCL3 的结果最差.

综上所述,拉格朗日方法计算压强梯度时,应采用双线性插值估计非网格点上的速度值、线性外插估计 NaN 值物质加速度. 若速度数据是真实的,采用 NCL3 和 2 阶中心时间插值计算压强梯度;而当速度数据包含噪声时,采用 NCL1 和最小二乘时间插值计算压强梯度.

3.1.3 黏性项的影响分析

下面,讨论黏性项  $\rho\nabla^2\boldsymbol{u}$  对压强梯度计算的影响,结果见图 5.

图 5(a)给出了不同的速度测量误差下,加入黏性项后,3 种不同的压强梯度计算方法得到的 NRMS 误差相对于不含黏性项时的 NRMS 误差的相对增量. 图 5(b)中以 NCL 为例给出了黏性项  $\rho\nabla^2\boldsymbol{u}$  中的 2 阶导数采用不同的离散格式(2 阶、4 阶和 6 阶中心差分)时,NCL 在不同的速度测量误差下加入黏性项后得到的 NRMS 误差相对于不含黏性项时得到的 NRMS 误差的相对增量. 从图中可以看出:①不同压强梯度计算方法得到的 NRMS 误差的相对增量受速度测量误差的影响不大. ②CE 的 NRMS 误差的相对增量略小于 NCE,而明显小于 NCL. 从文中第 3.2.1 节中,速度测量误差对 3 种不同的压强梯度计算方法的影响中可以看出,存在这种现象的原因是,不含黏性项的情况下,NCL 的 NRMS 误差明显小于 NCE,更小于 CE. ③黏性项中 2 阶导数离散格式的精度越高,NRMS 误差的相对增量越大. 其原因是,精度越高,参与运算的数据点越多,受噪声

的影响也越大. ④包含和不包含黏性项的压强梯度计算结果之间的相对差异小于 0.1%,因此,黏性项确实可以忽略不计.

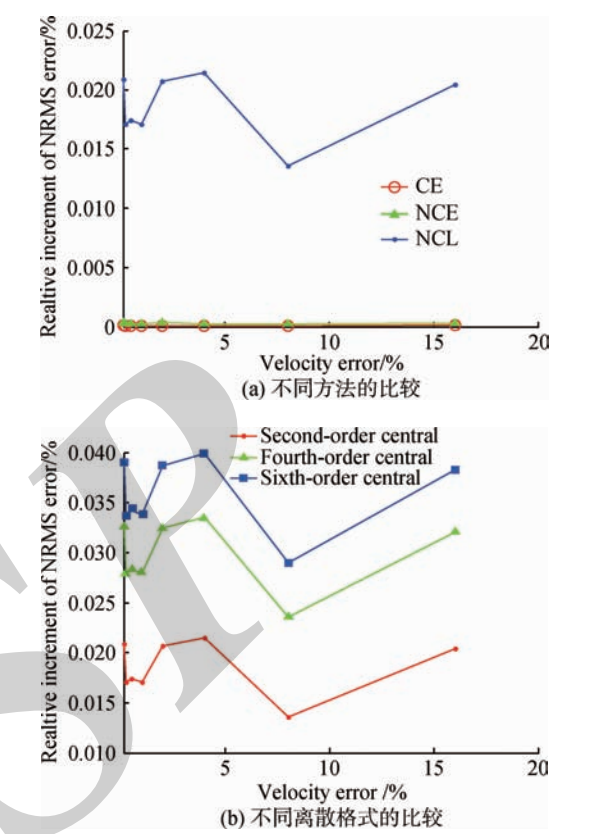


图 5 黏性项对压强梯度计算的影响  
Fig. 5 Effect of the viscous term on pressure gradient computation

3.2 PIV 参数设置的影响分析

基于 PIV 的压强梯度计算是根据 PIV 测量得到的速度场数据来估算流场中的瞬时压强梯度分布的,PIV 速度场数据作为输入量,其对流场特征刻画精准度直接决定着压强梯度计算的精准度,而 PIV 速度场的精准度受到 PIV 图像拍摄和数据处理时各种参数设置的影响. 因此,下面讨论 PIV 设置对压强梯度计算的影响.

3.2.1 速度测量误差的影响分析

PIV 速度测量时,若示踪粒子播撒不匀、激光在物面形成反射或数据处理的参数设置不当,均会造成测量结果存在误差,进而会影响压强梯度计算. 图 6(a)中给出了 3 种不同的压强梯度计算方法得到的 NRMS 误差随速度测量误差的变化规律,从图中可以看出:① 3 种压强梯度计算方法的 NRMS 误差均随速度测量误差呈线性增长趋势,NCL 的增长最慢,而 CE 的增长最快. ②在

所有的速度测量误差下,均有 NCL 的结果优于 NCE,而 CE 的结果最差。③为确定欧拉方法 CE 和 NCE 的性能差于拉格朗日方法 NCL 的原因,注意到  $Du/Dt = \partial u/\partial t + (u \cdot \nabla)u$ , 即物质加速度  $Du/Dt$  由当地加速度  $\partial u/\partial t$  和对流加速度  $(u \cdot \nabla)u$  两部分组成。图 6(b)给出了不同速度测量误差下,CE 和 NCE 计算压强梯度  $p_x$  和  $p_y$  时,当地加速度和物质加速度绝对比值的平均值。从图中可以发现,当地加速度的量值约比物质加速度的量值高一个数量级,且比值随着速度测量误差的增加而增加。这说明,当采用欧拉方法计算压强梯度时,物质加速度相对于当地加速度和对流加速度而言是一个小量,其值是两个大量的差,因此其结果更不稳定、更容易受到噪声的影响。

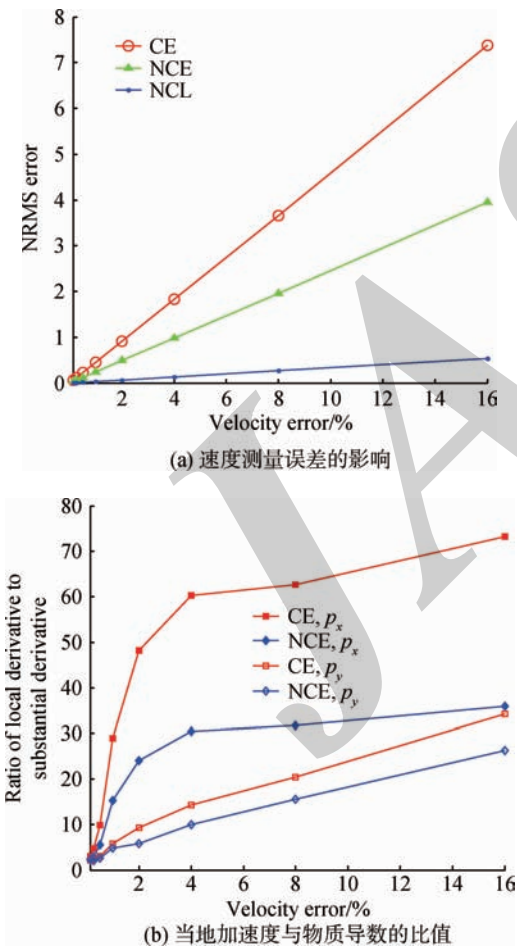


图 6 速度测量误差对压强梯度计算的影响  
Fig. 6 Effect of the velocity measuring error on pressure gradient computation

3.2.2 PIV 相机远近的影响分析

当采用 PIV 设备采集粒子图像时,相机离流动区域的远近会影响 PIV 的视场范围和流场结构的分辨率,进而会影响粒子图像的质量和

速度测量结果,对压强梯度计算产生影响。在固定 PIV 图像大小的情况下,PIV 相机位置的远近变化等效于像素之间物理间隔  $h$  的变化。当 PIV 相机的位置越远时,像素之间的  $h$  越大。当流场中涡本身的结构固定时,PIV 拍摄到的图像中涡的相对结构越小,对涡结构的分辨率越低。从图 1 中容易看出,此时压强梯度的绝对值较小的数据点越多,不同  $h$  下  $p_x^{real}$  和  $p_y^{real}$  是不同的。因此,这里采用压强梯度的平均峰值响应 APR 作为评价准则,当  $R_{ap}=1$  时,结果最优。图 7 给出了压强梯度计算的 APR 随相机远近的变化规律。从图中可以看出:①当速度数据不含噪声时,压强梯度计算的结果随  $h$  的增大而变差,但幅度较小。其原因是,此时压强梯度计算的性能主要受截断误差的影响,与物理间隔  $h$  之间的关系近似为  $O(h^2)$ 。因此,  $h$  越大误差也越大。②当速度数据包含噪声时,压强梯度计算的结果随  $h$  的增大而变好,CE 和 NCE 受  $h$  的影响较大,而 NCL 受  $h$  的影响很

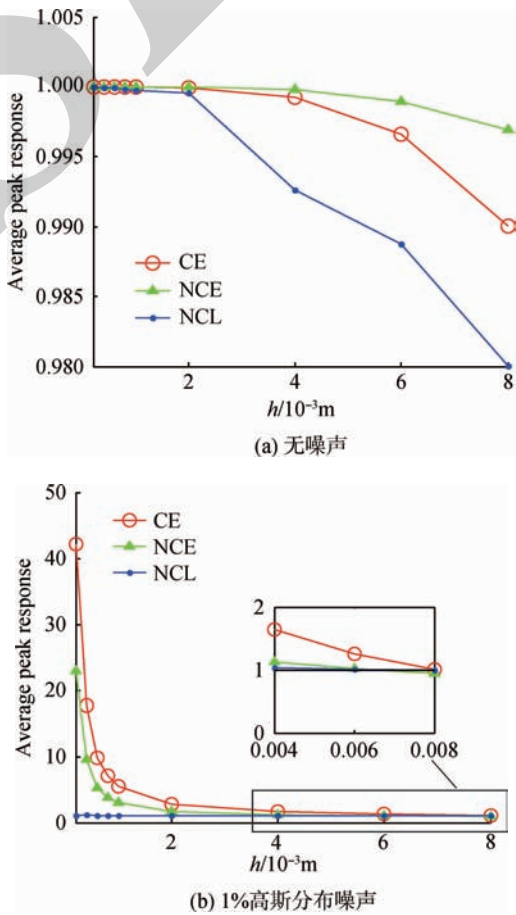


图 7 PIV 相机远近对压强梯度计算的影响  
Fig. 7 Effect of the distance between PIV camera and the field of view on pressure gradient computation

小, 其原因是, 此时压强梯度计算的性能主要受噪声的影响, 与  $h$  之间的关系近似为  $O(1/h)$ , 因此,  $h$  越大误差越小. 另一方面, 相对于拉格朗日方法, 欧拉方法的计算中包含速度数据的空间导数项  $(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}$ , 因此欧拉方法受空间参数  $h$  变化的影响较大. ③随着 PIV 相机的位置变远 (即  $h$  变大), 3 种压强梯度计算方法先高估 ( $R_{ap} > 1$ ) 再低估 ( $R_{ap} < 1$ ) 压强梯度, 这说明 PIV 对流场结构的分辨率并非越高越好, 而是有个合适的中间值.

3.2.3 PIV 相机偏斜的影响分析

当 PIV 相机的摆放存在偏斜时, 会造成相机平面与涡流动的二维平面不平行, 从而导致从 PIV 图像中获得的速度场是空间流动的二维投影, 造成速度测量不能真实反映涡的二维流动, 进而对压强梯度计算产生影响.

假设相机平面与涡流动的二维平面之间的夹角为  $\alpha$ , 而相机平面的水平中轴线与流动对流方向的夹角为  $\beta$ , 图 8 给出了压强梯度计算的平均峰值响应随  $\alpha$  和  $\beta$  的变化规律. 从图 8 中可以看

出: ①当速度数据不含噪声时,  $\alpha$  对压强梯度计算的影响大于  $\beta$ ; 但当速度数据存在噪声时, 噪声对压强梯度计算的影响大于相机偏斜  $\alpha$  和  $\beta$  的影响. ②尽管变化幅值略有差异, 但是相机偏斜对欧拉方法和拉格朗日方法的影响规律是基本一致的. ③噪声的存在使得欧拉方法的峰值响应明显变差, 而拉格朗日方法的峰值响应几乎不受影响.

3.2.4 PIV 相机分辨率的影响分析

当 PIV 相机的分辨率增加时, PIV 图像中的数据点增加, 相应地, 数据处理后的速度向量增加, 即计算网格量增加, 对涡结构的分辨率增加. 图 9 给出了压强梯度计算的平均峰值响应随 PIV 相机分辨率的变化规律, 从图中可以看出: 当速度数据不含噪声时, 3 种不同方法的平均峰值响应均随相机分辨率的增加而变好; 而当速度数据包含噪声时, 平均峰值响应均随相机分辨率的增加而线性变差. 其原因是, 在 PIV 视场范围不变的情况下, 相机分辨率的增加等效于像素间物理间隔  $h$  的减小. 因此, 图 9 的变化规律与图 7 的变化规律相似但趋势相反.

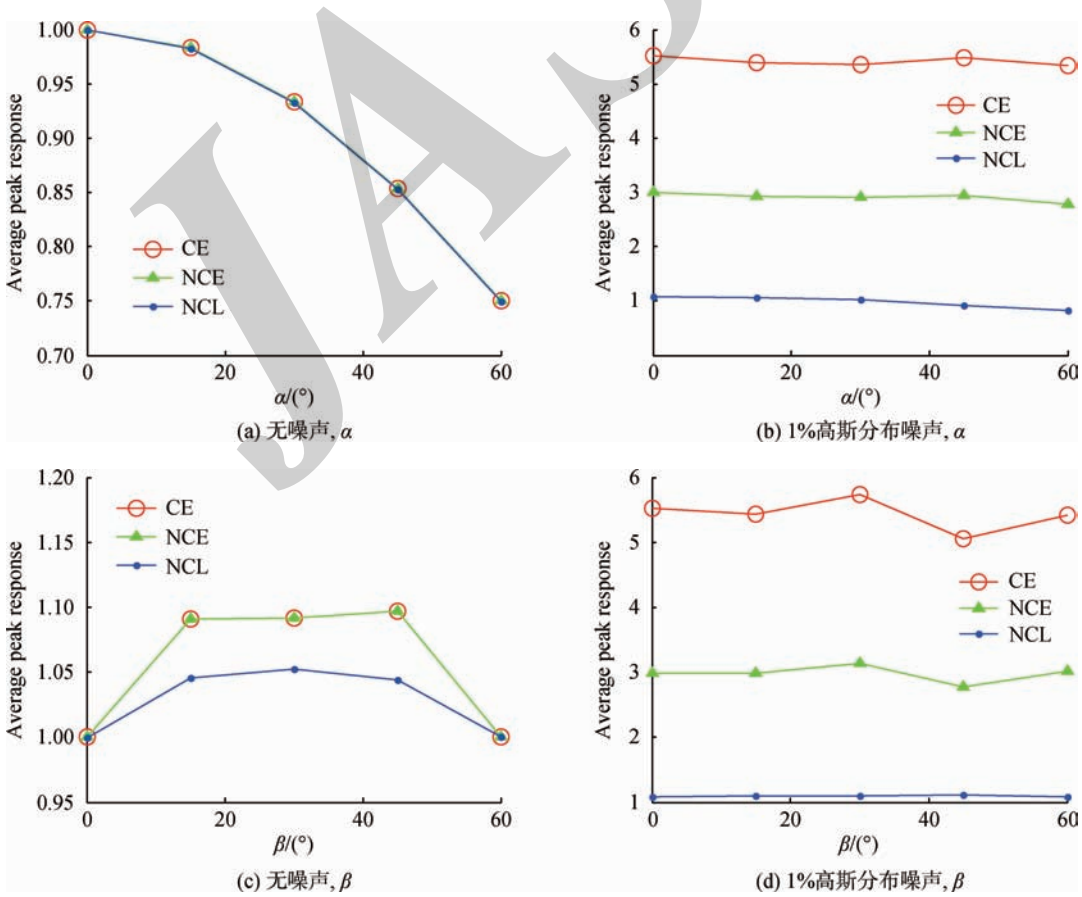


图 8 PIV 相机偏斜对压强梯度计算的影响

Fig. 8 Effect of the deflection of PIV camera on pressure gradient computation

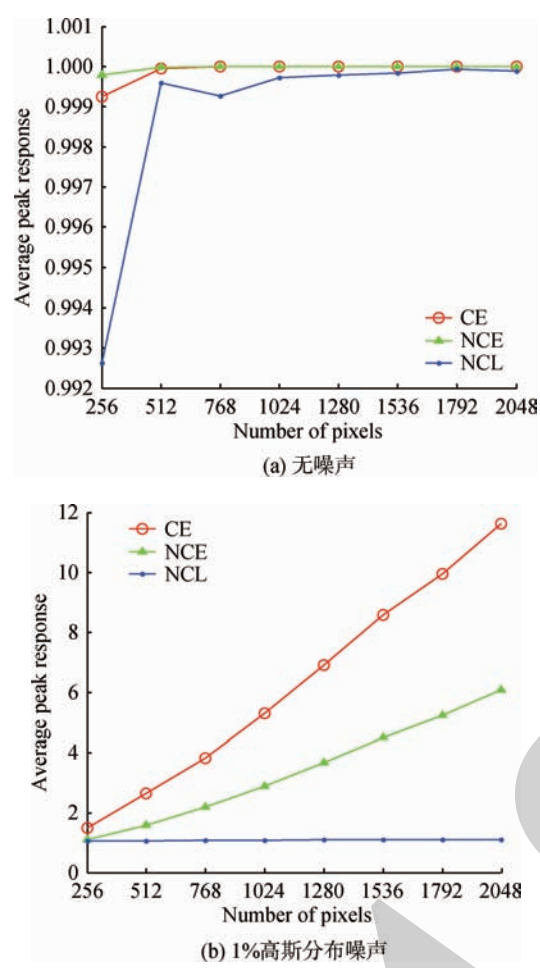


图 9 PIV 相机分辨率对压强梯度计算的影响  
Fig. 9 Effect of the resolution of the PIV camera on pressure gradient computation

3.2.5 PIV 采样时间间隔的影响分析

图 10 给出了压强梯度计算的 NRMS 误差随 PIV 采样时间间隔  $\Delta t$  ( $\Delta t = 1/f$ ) 的变化规律,从图中可以看出:①不论速度数据中是否包含噪声,3 种不同方法的 NRMS 误差均随着时间间隔的增加而先下降后上升.这说明,对 PIV 采样频率而言,并不是越高越好,而是有个合适的中间值.②当速度数据不包含噪声时,欧拉方法在时间间隔较小的情况下优于拉格朗日方法而在时间间隔较大的情况下则明显差于拉格朗日方法.③当速度数据包含噪声时,NCL 的结果最好而 CE 的结果最差,并且 NCL 方法在一个较大的时间间隔范围内能保持基本稳定.④噪声对压强梯度计算的影响大于 PIV 采样时间间隔的影响.

3.2.6 PIV 数据处理时参数设置的影响

图 11 给出了压强梯度计算峰值响应随 PIV 数据处理时参数设置的变化规律,图中横坐标 1~3,4~6,7~9,10~12 和 13~15 分别对应查

询窗为  $128 \times 128, 64 \times 64, 32 \times 32, 16 \times 16$  和  $8 \times 8$  的结果,而每个查询窗下的 3 组数据分别对应重叠因子为 0,50%和 75%的结果.从图中可以看出:①当速度数据不含噪声时,随着查询窗的减小或重叠因子的增加,PIV 视场中速度数据点增多,PIV 压强梯度计算的结果逐渐变好;重叠因子的增加只有在查询窗较大的情况下才对结果有明显

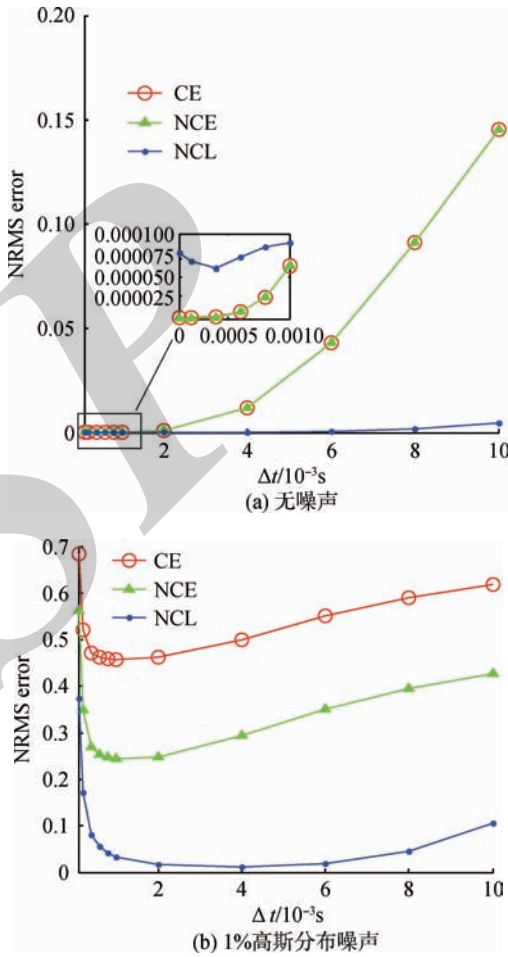
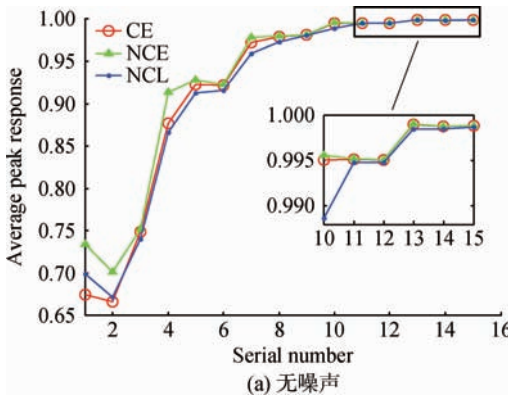


图 10 PIV 采样时间间隔对压强梯度计算的影响  
Fig. 10 Effect of the time interval of PIV sampling on pressure gradient computation



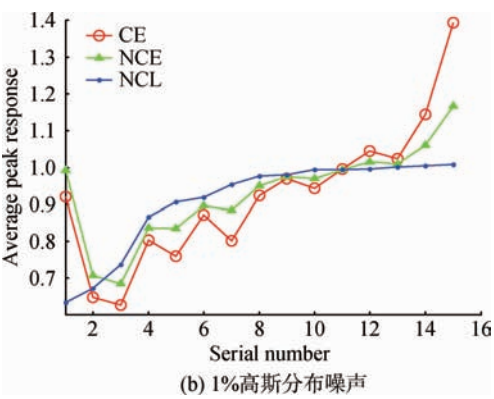


图 11 PIV 数据处理时参数设置对压强梯度计算的影响

Fig. 11 Effect of the parameter setting of PIV data processing on pressure gradient computation

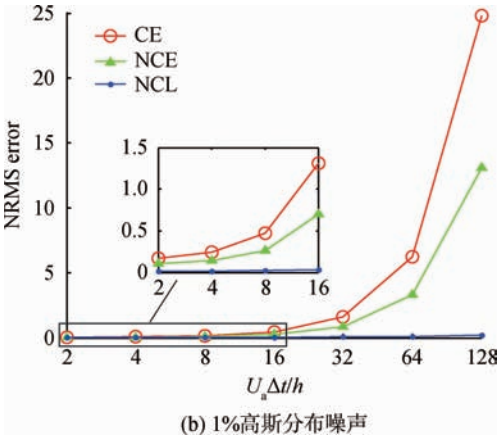


图 12 高斯涡对流速度对压强梯度计算的影响

Fig. 12 Effect of the advection velocity of Gaussian vortex on pressure gradient computation

的影响,当查询窗足够小时,重叠因子的影响很小。②当数据包含噪声时,随着查询窗的减小,PIV 压强梯度计算的结果先低估真实值再逐渐高估真实值;查询窗较大时,重叠因子越大越好,而当查询窗较小时,重叠因子越大 PIV 压强梯度计算的结果反而越差。上述结果再次说明,空间分辨率并不是越高越好,而是有个合适的中间值。

3.3 流场特征的影响分析

3.3.1 对流速度的影响

图 12 给出了压强梯度计算的 NRMS 误差随高斯涡对流速度  $U_a$  的变化规律。从图中可以看出:①不论速度数据是否包含噪声,3 种压强梯度计算方法的 NRMS 误差均随着对流速度  $U_a$  的增加而增加,即涡强度相对于对流速度较小时,压强梯度计算的性能差。其中拉格朗日方法的变化趋势更稳定平缓,基本呈线性增长趋势,

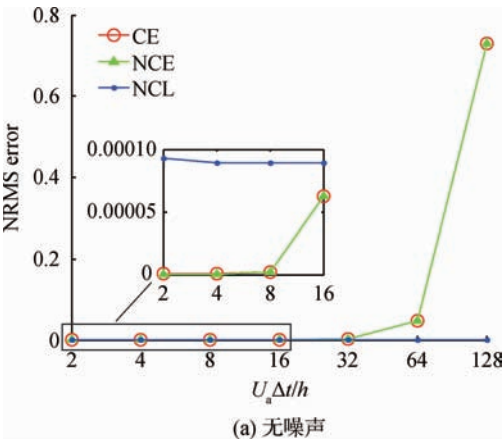
而欧拉方法受  $U_a$  的影响较大,呈 2 次增长趋势。②在相同的参数设置下,1%的高斯分布噪声使得压强梯度计算的 NRMS 误差比无噪声时高约 2 个数量级。

3.3.2 高斯涡最大切向速度的影响

图 13 给出了压强梯度计算的平均峰值响应随高斯涡最大切向速度  $V_p$  的变化规律。从图中可以看出:①无噪声时,欧拉方法的性能几乎不受  $V_p$  的影响,而拉格朗日方法的性能在  $V_p \Delta t/h > 64$  后迅速变差。②当速度数据包含噪声时,随着  $V_p$  的增加,欧拉方法得到的压强梯度越来越准确,而拉格朗日方法先高估压强梯度再低估压强梯度,当  $1/2 \leq V_p/U_a \leq 2$  时其结果较好。③总的来说,当速度数据包含噪声时,涡强度  $V_p$  越小,各类方法的性能越差。其原因是,在对流速度  $U_a$  相同的情况下,  $V_p$  越小时,同一位置(欧拉方法)或同一粒子(拉格朗日方法)在不同时刻的速度变化本来应该越小;但存在噪声时,噪声量是对流速度和涡旋转速度的合速度的 1%,导致不同时刻的速度变化较大,因此压强梯度计算结果较差。④为确定拉格朗日方法在  $V_p$  较大时低估压强梯度的原因,图 13(c)给出了拉格朗日方法计算过程中,NaN 压强梯度值所占百分比随  $V_p$  的变化情况。从图中可以看出,造成拉格朗日方法在  $V_p$  较大时性能较差的原因是 NaN 压强梯度值较多,而出现这种现象的根本原因是  $V_p$  较大时 PIV 粒子更容易逃逸于视场范围之外。

3.3.3 涡大小的影响

图 14 给出了压强梯度计算的平均峰值响应



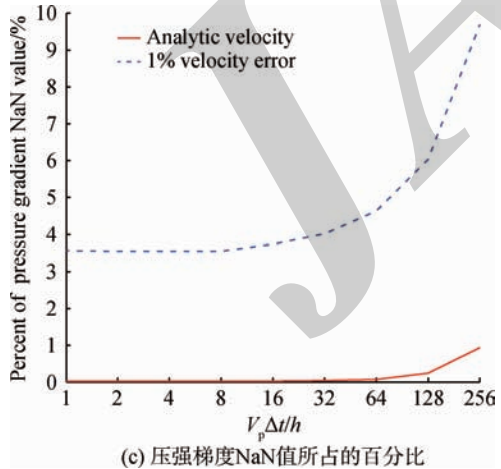
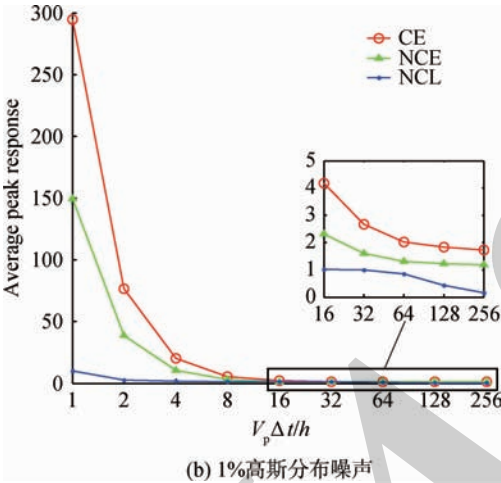
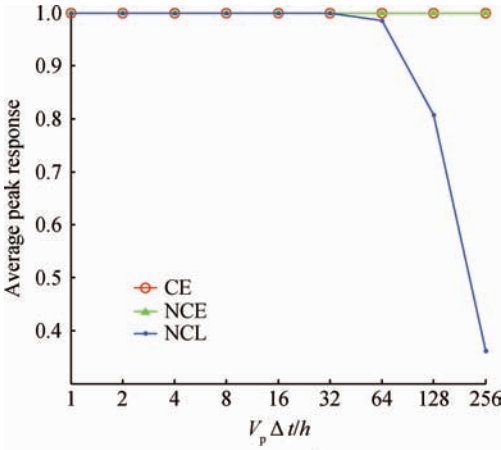


图 13 高斯涡最大切向速度对压强梯度计算的影响  
Fig. 13 Effect of the maximum tangential velocity of Gaussian vortex on pressure gradient computation

结构的分辨率增加,3 种压强梯度计算方法的性能均变好;②当速度数据包含噪声时,随着  $r_c$  变大,3 种压强梯度计算方法的峰值响应均升高,其中欧拉方法一直高估压强梯度而拉格朗日方法先低估再高估压强梯度;拉格朗日方法受  $r_c$  的影响较小而欧拉方法受  $r_c$  的影响较大. ③3 种方法的最优性能在  $r_c$  取合适值时达到,例如,速度数据含噪声时,  $r_c/h = 16$  时欧拉方法性能最优,而  $r_c/h = 32$  时拉格朗日方法的性能最优.

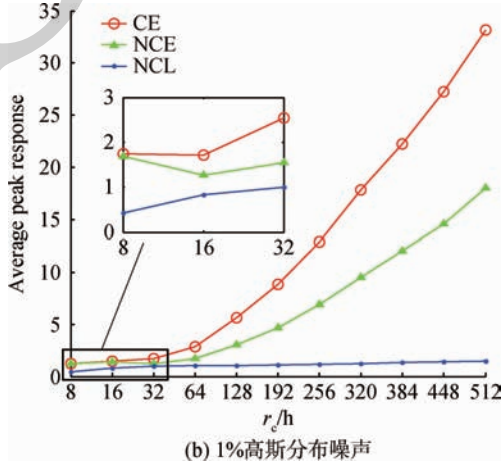
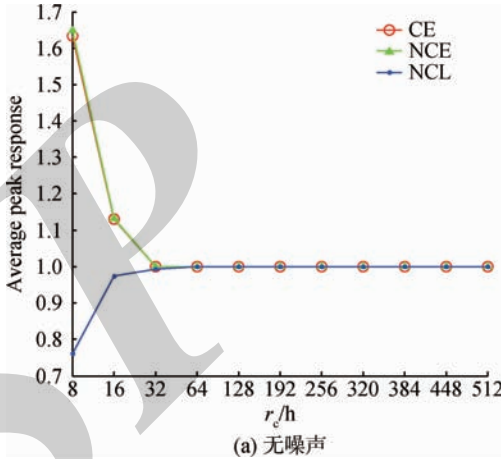


图 14 高斯涡的核半径对压强梯度计算的影响  
Fig. 14 Effect of the core radius of the Gaussian vortex on pressure gradient computation

3.3.4 涡位置的影响分析

图 15 给出了压强梯度计算的平均峰值响应随涡中心位置的变化规律. 从图中可以看出:①不论速度数据是否包含噪声,当高斯涡的中心位置在视场边缘时,压强梯度计算的性能变差.②噪声的存在使得欧拉方法的峰值响应明显变差,而拉格朗日方法的峰值响应几乎不受影响.

随涡核半径  $r_c$  的变化规律. 从图中可以看出:①速度数据无噪声时,在  $r_c$  较小的情况下,欧拉方法高估压强梯度而拉格朗日方法低估压强梯度;随着  $r_c$  变大,在其他参数不变的情况下对涡

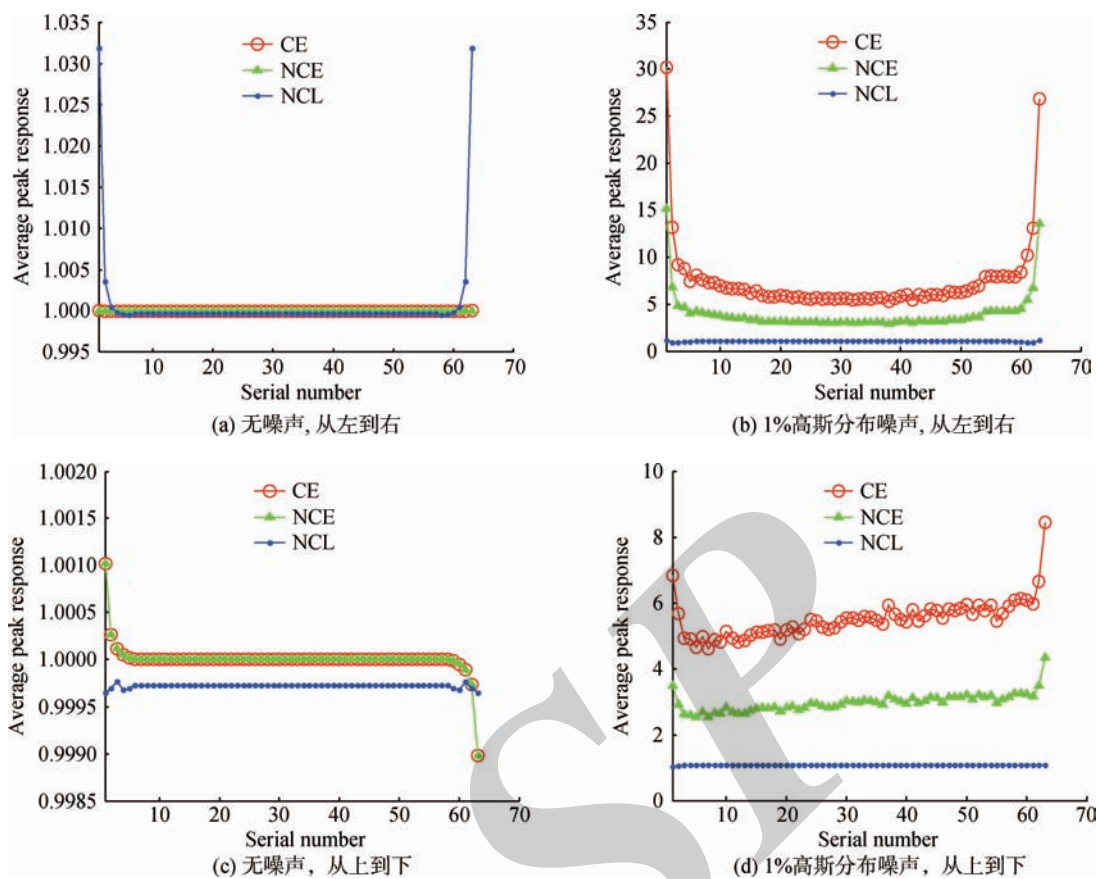


图 15 涡的空间位置对压强梯度计算的影响

Fig. 15 Effect of the spatial location of the vortex on pressure gardient computation

4 结 论

基于 PIV 速度场测量结果计算流场中的瞬时压强梯度分布在原理和实践上都是可行的,对流高斯涡模型上的仿真实验为该技术的成功应用提供了一定的参考和指导。

1) PIV 速度测量的精度是该技术成功与否的关键性影响因素,1%噪声对压强梯度计算的影响比其他过程高约 2 个数量级,因此应合理选取离散格式、剔除物面和图像边缘的速度数据并尽量消除或减小速度测量误差。

2) 时间分辨率和空间分辨率的设置并非越高越好,而是有个合适的中间值;但在实践中,恰当分辨率的选取通常是困难的,此时宁愿采用较高的分辨率。

3) 3 种压强梯度计算方法中,非守恒型欧拉方法优于守恒型欧拉方法,欧拉方法受测量噪声、采样时间间隔和对流速度的影响较大;拉格朗日方法在大多数情况下优于欧拉方法,但当流动结构较复杂以致难以追踪粒子路径时(如涡旋转运动较强、粒子逃逸于 PIV 视场之外)性能较差。因

此,应根据流动类型和流场特征合理选取压强梯度计算方法。

参考文献:

[1] RAFFEL M, WILLERT C, WERELEY S, et al. Particle image velocimetry: a practical guide [M] 2nd ed. Berlin: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2007.

[2] ADRIAN R J. Twenty years of particle image velocimetry [J]. Experiments in Fluids, 2005, 39(2): 159-169.

[3] ELSINGA G E, SCARANO F, Wieneke B, et al. Tomographic particle image velocimetry[J]. Experiments in Fluids, 2006, 41(6): 933-947.

[4] WESTERWHEEL J, ELSINGA G E, ADRIAN R J. Particle image velocimetry for complex and turbulent flows[J]. Annual Review of Fluid Mechanics, 2013, 45: 409-436.

[5] DE KAT R, VAN OUDHEUSDEN B W, SCARANO F. Instantaneous pressure field around a square-section cylinder using time-resolved stereo-PIV[R]. San Antonio: The 39th AIAA Fluid Dynamics Conference, 2009.

[6] VAN OUDHEUSDEN B W. PIV-based pressure measurement[J]. Measurement Science and Technology, 2013, 24 (3): 032001. 1-032001. 32.

[7] HENNING A, KAEPERNICK K, EHRENFRIED K, et al. Investigation of aeroacoustic noise generation by simultaneous particle image velocimetry and microphone meas-

urements[J]. Experiments in Fluids, 2008, 45 ( 6 ): 1073-1085.

[ 8 ] KOSCHATZKY V, MOORE P D, WESTERWEEL J, et al. High speed PIV applied to aerodynamic noise investigation[J]. Experiments in Fluids, 2011, 51(4):863-876.

[ 9 ] VAN OUDHEUSDEN B W, SCARANO F, ROOSENBOOM E W M, et al. Evaluation of integral forces and pressure fields from planar velocimetry data for incompressible and compressible flows [ J ]. Experiments in Fluids, 2007, 43(2):153-162.

[10] VAN OUDHEUSDEN B W. Principles and application of velocimetry-based planar pressure imaging in compressible flows with shocks[J]. Experiments in Fluids, 2008, 45(4):657-674.

[11] JAKOBSEN M, DEWHIRST T, GEATED C. Particle image velocimetry for predictions of acceleration fields within fluid flows [ J ]. Measurement Science and Technology, 1997, 8(12):1502-1516.

[12] CHRISTENSEN K, ADRIAN R. Measurement of instantaneous Eulerian acceleration fields by particle image velocimetry: methods and accuracy[J]. Experiments in Fluids, 2002, 33(6):759-769.

[13] VIOLATO D, MOORE P, SCARANO F. Lagrangian and Eulerian pressure field evaluation of rod-airfoil flow from time-resolved tomographic PIV[J]. Experiments in Fluids, 2011, 51(4):1057-1070.

[14] BAUR T, KÖNGETER J. PIV with high temporal resolution for the determination of local pressure reductions from coherent turbulence phenomena[R]. Santa Barbara: The 3rd International Workshop on Particle Image Velocimetry, 1999.

[15] CHARONKO J J, KING C V, SMITH B L, et al. Assessment of pressure field calculations from particle image velocimetry measurements [ J ]. Measurement Science and Technology, 2010, 21(10):105401.1-105401.15.

[16] GURKA R, LIBERZON A, HEFETZ D, et al. Computation of pressure distribution using PIV velocity data[R]. Santa Barbara: The 3rd International Workshop on Particle Image Velocimetry, 1999.

[17] LIU X, KATZ J. Instantaneous pressure and material acceleration using a four-exposure PIV system[J]. Experiments in Fluids, 2006, 41(2):227-240.

[18] DE KAT R, VAN OUDHEUSDEN B W. Instantaneous planar pressure from PIV: analytic and experimental test-cases [R]. Lisbon, Portugal: The 15th International Symposium on Applications of Laser Techniques to Fluid Mechanics, 2010.

[19] DE KAT R, VAN OUDHEUSDEN B W. Instantaneous planar pressure determination from PIV in turbulent flow [J]. Experiments in Fluids, 2012, 53(5):1089-1106.

[20] 王勇, 陈鹏, 耿子海, 等. 基于 PIV 速度场测量重构压强场的研究进展[J]. 实验流体力学, 2014, 28(4):1-8.

WANG Yong, CHEN Peng, GENG Zihai, et al. Development of PIV-based instantaneous pressure determination [J]. Journal of Experiments in Fluid Mechanics, 2014, 28 (4):1-8. (in Chinese)

(编辑:王碧琨)